数理解析研究所講究録
1062 巻 1998 年 128-139

単葉有理型函数の線形結合の非単葉性について

広島大学　柴　雅和　(Masakazu Shiba)
京都工織大　米谷文男 (Fumio Maitani)

複素球面内の領域 G 上高々点 ζ を除いて正則単葉な函数 f_0 に対して次の族

$Q_0 = \{f : f$ は境界近傍で有界な単葉函数で, $f - f_0$ が G 上正則$\}$

を考える。$f \in Q_0$ に対して $A(f)$ で f_0 が極を持つ時は f の像の補集合の面積を表わし、f_0 が極を持たない時は f の像の面積を絶対値とする非正数を表わす。次の補題に注意する。

補題 1. $f, g \in Q_0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} Im \int_{\partial G_n} f\overline{dg} = A(f) + A(g) + \frac{1}{2}||df - dg||^2.$$

但し、$\{G_n\}$ を G の正則近似列とし、

$$||df - dg||^2 = \int\int_G (df - dg) \wedge *\overline{(df - dg)}$$

とする。

証明　$D_\rho = \{z : |z - \zeta| < \rho\} \subset G_n$ として

$$||df - dg||^2_{G_n - D_\rho} = \int\int_{G_n - D_\rho} (df - dg) \wedge *\overline{(df - dg)}$$

$$= i\int\int_{G_n - D_\rho} (df - dg) \wedge \overline{(df - dg)}$$

$$= i\int\int_{G_n - D_\rho} d\{(f - g)\overline{(df - dg)}\}$$

$$= i\int_{\partial(G_n - D_\rho)} (f - g)\overline{d(f - g)}$$

$$= i\int_{\partial G_n} f\overline{df} + i\int_{\partial G_n} g\overline{dg} - i\int_{\partial G_n} f\overline{dg} - i\int_{\partial G_n} g\overline{df}$$

$$-i\int_{\partial D_\rho} (f - g)\overline{d(f - g)}$$

$$= i\int_{\partial f(G_n)} w\overline{dw} + i\int_{\partial g(G_n)} w\overline{dw} - i\int_{\partial G_n} f\overline{dg}$$

$$-i\int_{\partial G_n} d(g\overline{f}) + i\int_{\partial G_n} \overline{f}dg - ||df - dg||^2_{D_\rho}.$$

従って、

$$2Im\int_{\partial G_n} f\overline{dg} =$$

$$\begin{cases} 2\int\int_{\mathbf{C}-f(G_n)} dudv + 2\int\int_{\mathbf{C}-g(G_n)} dudv + ||df-dg||^2_{G_n} \\ \hfill f_0\text{が極を持つ} \\ -2\int\int_{f(G_n)} dudv - 2\int\int_{g(G_n)} dudv + ||df-dg||^2_{G_n} \\ \hfill f_0\text{が極を持たない}. \end{cases}$$

よって結論を得る。

補題 **2.** $f, g \in Q_0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} Re\int_{\partial G_n} f\overline{dg}$$

$$= A(f) + A(g) + \frac{1}{2}||df + idg||^2_{G-D_\rho} + \frac{i}{2}\int_{\partial D_\rho}(f+ig)\overline{d(f+ig)}.$$

証明

$$||df + idg||^2_{G_n-D_\rho} = \int\int_{G_n-D_\rho}(df+idg)\wedge *\overline{(df+idg)}$$

$$= i\int\int_{G_n-D_\rho}(df+idg)\wedge\overline{(df+idg)}$$

$$= i\int\int_{G_n-D_\rho}\{d(f+ig)\overline{(df+idg)}\}$$

$$
\begin{aligned}
&= i\int_{\partial(G_n - D_\rho)} (f+ig)\overline{d(f+ig)} \\
&= i\int_{\partial G_n} f\overline{df} + i\int_{\partial G_n} ig\overline{idg} + i\int_{\partial G_n} f\overline{idg} + i\int_{\partial G_n} ig\overline{df} \\
&\quad -i\int_{\partial D_\rho} (f+ig)\overline{d(f+ig)} \\
&= i\int_{\partial f(G_n)} w\overline{dw} + i\int_{\partial g(G_n)} w\overline{dw} + \int_{\partial G_n} f\overline{dg} - \int_{\partial G_n} d(g\overline{f}) \\
&\quad + \int_{\partial G_n} \overline{f}dg - i\int_{\partial D_\rho} (f+ig)\overline{d(f+ig)}.
\end{aligned}
$$

従って、

$$
\begin{aligned}
2Re\int_{\partial G_n} f\overline{dg} &= 2A(f) + 2A(g) + ||df + idg||^2_{G_n - D_\rho} \\
&\quad + i\int_{\partial D_\rho} (f+ig)\overline{d(f+ig)}.
\end{aligned}
$$

これらの極限は正則近似列の取り方に依存せず存在することが示されたので

$$
Im\int_{\partial G} f\overline{dg} = \lim_{n\to\infty} Im\int_{\partial G_n} f\overline{dg},
$$

$$
Re\int_{\partial G} f\overline{dg} = \lim_{n\to\infty} Re\int_{\partial G_n} f\overline{dg}
$$

と置いてまとめれば,

命題 **1.**
$$\int_{\partial G} f\overline{dg} = (1+i)(A(f)+A(g))$$
$$+\frac{1}{2}\{||df+idg||^2_{G-D_\rho}+i||df-dg||^2\}+\frac{i}{2}\int_{\partial D_\rho}(f+ig)\overline{d(f+ig)}.$$

また、

$$0 = Re\int_{\partial G_n} d(f\overline{g}) = Re\int_{\partial G_n} f\overline{dg} + Re\int_{\partial G_n}\overline{g}df$$

故、

$$Re\int_{\partial G} g\overline{df} = -Re\int_{\partial G} f\overline{dg},\ Re\int_{\partial G} f\overline{df} = 0,$$
$$A(f) = -\frac{1}{2}||df||^2_{G-D_\rho} - \frac{i}{2}\int_{\partial D_\rho} f\overline{df} = \frac{1}{2}Im\int_{\partial G} f\overline{df}.$$

さて、Q_0 内の函数列 $\{f_k\}_{k\in I}$ に対して

$$s_{k\ell} = Re\int_{\partial G} f_k\overline{df_\ell},\ t_{k\ell} = Im\int_{\partial G} f_k\overline{df_\ell}$$

と置く。$s_{\ell k} = -s_{k\ell},\ \ s_{kk} = 0,\ \ t_{\ell k} = t_{k\ell} \geq 0,\ \ t_{kk} = 2A(f_k)$ である。ここで複素数列 $\{\lambda_k\}_{k\in I}$ が $\sum_{k\in I}\lambda_k = 1$ を満たすとする。今 f_0 が極を持つとして、$F = \sum_{k\in I}\lambda_k f_k \in Q_0$ ならば補題 1 より次の命題を得る。

命題 2. 任意の $n \in I$ に対して、

$$0 \leq \sum_{k \in I} (Re\lambda_k t_{kn} + Im\lambda_k s_{kn}).$$

更に、

$$0 \leq \sum_{k \in I} A(f_k)|\lambda_k|^2 + \sum_{k<\ell} s_{k\ell} Im(\lambda_k \overline{\lambda_\ell}) + \sum_{k<\ell} t_{k\ell} Re(\lambda_k \overline{\lambda_\ell}).$$

証明　補題 1 より

$$0 \leq Im \int_{\partial G} F\overline{df_n} = Im \int_{\partial G} (\sum_{k \in I} \lambda_k f_k)\overline{df_n}$$

$$= Im \sum_{k \in I} \lambda_k \int_{\partial G} f_k \overline{df_n} = \sum_{k \in I} (Re\lambda_k t_{kn} + Im\lambda_k s_{kn}).$$

そして、

$$0 \leq Im \int_{\partial G} F\overline{dF} = Im \int_{\partial G} (\sum_{k \in I} \lambda_k f_k)\overline{d(\sum_{\ell \in I} \lambda_\ell f_\ell)}$$

$$= Im \sum_{k \in I} \sum_{\ell \in I} \lambda_k \overline{\lambda_\ell} \int_{\partial G} f_k \overline{df_\ell} = Im \sum_{k \in I} \sum_{\ell \in I} \lambda_k \overline{\lambda_\ell}(s_{k\ell} + it_{k\ell})$$

$$= \sum_{k \in I} |\lambda_k|^2 t_{kk} + 2\sum_{k<\ell} s_{k\ell} Im(\lambda_k \overline{\lambda_\ell}) + 2\sum_{k<\ell} t_{k\ell} Re(\lambda_k \overline{\lambda_\ell}).$$

特に、

系 1. $\lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ F = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in Q_0,\ (f_1 \neq f_2)$ の時、

$$Re(\lambda_1 t_{11} + \lambda_2 t_{21}) + Im\lambda_2 s_{21} \geq 0,$$

$$Re(\lambda_1 t_{12} + \lambda_2 t_{22}) + Im\lambda_1 s_{12} \geq 0,$$

$$|\lambda_1 - \frac{A(f_1) - A(f_2) + is_{12}}{||df_1 - df_2||^2} - \frac{1}{2}|$$

$$\leq \sqrt{\frac{(A(f_1) - A(f_2))^2 + ||df_1 - df_2||^2(A(f_1) + A(f_2)) + s_{12}^2}{||df_1 - df_2||^4} + \frac{1}{4}}.$$

更に、$t_{11} = t_{22} = s_{12} = 0, t_{12} > 0$ ならば、

$$|\lambda_1 - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}.$$

証明　最初の２不等式は命題より従う。また、

$$0 \leq |\lambda_1|^2 t_{11} + |\lambda_2|^2 t_{22} + 2s_{12} Im(\lambda_1 \overline{\lambda_2}) + 2t_{12} Re(\lambda_1 \overline{\lambda_2})$$

$$= |\lambda_1|^2 t_{11} + |1 - \lambda_1|^2 t_{22} + 2s_{12} Im(\lambda_1 - |\lambda_1|^2) + 2t_{12} Re(\lambda_1 - |\lambda_1|^2)$$

$$= |\lambda_1|^2 (t_{11} + t_{22} - 2t_{12}) - is_{12}(\lambda_1 - \overline{\lambda_1}) + (t_{12} - t_{22})(\lambda_1 + \overline{\lambda_1}) + t_{22}.$$

ここで、

$$t_{11} + t_{22} - 2t_{12}$$

$$= 2A(f_1) + 2A(f_2) - (2A(f_1) + 2A(f_2) + ||df_1 - df_2||^2)$$

$$= -||df_1 - df_2||^2,$$

$$t_{12} - t_{22} + is_{12} = A(f_1) - A(f_2) + \frac{1}{2}||df_1 - df_2||^2) + is_{12}.$$

従って、

$$||df_1 - df_2||^2|\lambda_1|^2 - \overline{(t_{12} - t_{22} + is_{12})}\lambda_1 - (t_{12} - t_{22} + is_{12})\overline{\lambda_1} \leq t_{22},$$

$$|\lambda_1 - \frac{A(f_1) - A(f_2) + is_{12}}{||df_1 - df_2||^2} - \frac{1}{2}|^2$$
$$\leq \frac{(A(f_1) - A(f_2))^2 + ||df_1 - df_2||^2(A(f_1) + A(f_2)) + s_{12}^2}{||df_1 - df_2||^4} + \frac{1}{4}$$

より結論を得る。

G を複素球面上の無限遠点を含む有限連結領域として β_j でその 境界成分を表わす。Koebe の定理によって、実数の組 $\Theta = \{\theta_j\}$ に対して、G 上の無限遠点を無限遠点に写す等角写像で β_j は実軸となす角が θ_j ラジアンである線分に対応し無限遠点近傍で次のように正規化されている写像が唯一つある。

$$\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^{-n}.$$

これを f_Θ で表わす。簡便の為 $\Theta(t) = \{\theta_j + \frac{\pi t}{2}\}$ として $P_t = f_{\Theta(t)}$ と表わす。写像の一意性から

$$P_t = \exp(\frac{i\pi t}{2})\{P_0 \cos\frac{\pi t}{2} - iP_1 \sin\frac{\pi t}{2}\}.$$

各 β_j 上

$$Re\{\exp i(\frac{\pi t}{2}-\theta_j)(P_0+P_1)\}-\exp i(\frac{\pi t}{2}-\theta_j)P_{-t}$$

$$=Re\{\exp i(\frac{\pi t}{2}-\theta_j)(P_0+P_1)\}$$

$$-\exp i(\frac{\pi t}{2}-\theta_j)\exp(\frac{-i\pi t}{2})\{P_0\cos\frac{\pi t}{2}+iP_1\sin\frac{\pi t}{2}\}$$

$$=Re\{\exp i(\frac{\pi t}{2}-\theta_j)(P_0+P_1)\}$$

$$-\exp i(-\theta_j)\{P_0\cos\frac{\pi t}{2}+iP_1\sin\frac{\pi t}{2}\}$$

$$=Re\{\exp i(-\theta_j)\{iP_0\sin\frac{\pi t}{2}+P_1\cos\frac{\pi t}{2}\}=constant.$$

そして、$\exp i(\frac{\pi t}{2}-\theta_j)P_{-t}$ は β_j を実軸の線分上に両端を除いて二価に写す。そこで、

$$Re\{\exp i(\frac{\pi t}{2}-\theta_j)(P_0+P_1)\}=\exp i(\frac{\pi t}{2}-\theta_j)P_{-t}+constant$$

は P_0+P_1 によるβ_j の像が傾き $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2}+\theta_j$ の直線と 2 点でのみ交わることを示しておりこの像が単葉な凸曲線となることを示している。更に、偏角の原理によって P_0+P_1 が G 上単葉となることが分かる。$0<s<1$ に対して $P_0+\frac{1-s}{s}P_1$ も β_j の像を単葉な凸曲線に写し G 上単葉となる。従って、

$0 \le s \le 1$ に対して $sP_0 + (1-s)P_1$ は G を補集合の各成分が凸集合であるような領域に単葉に写す。直ちに次の命題にまとめられる。

命題 3. $0 \le s \le 1$ に対して $sP_t + (1-s)P_{t+1}$ は G を補集合の各成分が凸集合であるような領域に単葉に写す。$s < 0$ 又は $s > 1$ に対して $sP_t + (1-s)P_{t+1}$ は G 上単葉でない。

さて、$\frac{\pi t}{2} = \theta$ として実数 s に対して

$$sP_t + (1-s)P_{t+1}$$

$$= s\exp(i\theta)\{P_0\cos\theta - iP_1\sin\theta\}$$

$$+(1-s)i\exp(i\theta)\{-P_0\sin\theta - iP_1\cos\theta\}$$

$$= \exp(i\theta)(s\cos\theta - i(1-s)\sin\theta)P_0$$

$$+\exp(i\theta)(-is\sin\theta + (1-s)\cos\theta)P_1.$$

ここで、

$$\lambda = \exp(i\theta)(s\cos\theta - i(1-s)\sin\theta),$$

$$\mu = \exp(i\theta)(-is\sin\theta + (1-s)\cos\theta)$$

とおけば、

$$sP_t + (1-s)P_{t+1} = \lambda P_0 + \mu P_1,$$

$$\lambda + \mu = \exp(i\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = 1,$$

$$\lambda - \mu = \exp(i\theta)(2s-1)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= (2s-1)\exp(2i\theta).$$

そして、

$$\lambda = \frac{1}{2}\{1 + (2s-1)\exp(2i\theta)\},$$

$$\mu = \frac{1}{2}\{1 - (2s-1)\exp(2i\theta)\}.$$

これより次の命題を得る。

命題 **4.**　$\lambda P_t + (1-\lambda)P_{t+1}$ が G 上単葉となるのは、

$$\lambda \in \{z : |z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$$

に限る。

References

[AS] L. Ahlfors and L. Sario, Riemann surfaces Princeton Univ. Press, 1960 pp.382.

[K] P. Koebe, Abhandlungen zur Theorie der Konformen Abbildung: V. Abbildung mehrfach zusammenhangender Bereiche auf Schlizbereiche, Math. Z., 2(1918), 198-236.

[M] F. Maitani, Conformal welding of annuli, to appear.

[MM] F. Maitani and D. Minda, Rectilinear slit conformal mappings, J. Math. Kyoto Univ. 36(1996), 659-668.

[OS] K. Oikawa and N. Suita, On parallel slit mappings Kodai Math. Sem. Rep. 16 (1964), 249-254.

[S] M. Shiba, On the Riemann-Roch theorem on open Riemann surfaces, J. Math. Kyoto Univ. 11(1971), 495-525.

[W] F. Weening, Existence and Uniqueness of Non- parallel Slit Maps, Thesis, University of California, San Diego, 1994.